УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Фёдоров, Н. Д. Иванова, Ю. Ю. Фёдорова

Аннотация. Рассмотрена задача с нелокальным интегральным в смысле Стилтьеса условием для неоднородного эволюционного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с оператором, являющимся генератором C_0-непрерывной полугруппы. В случае непрерывной неоднородности в норме графика этого оператора доказана необходимость и достаточность для существования обобщенного решения задачи принадлежности данных в нелокальном условии области определения генератора, получена оценка устойчивости этого решения и найдены условия существования классического решения нелокальной задачи. Перечисленные результаты распространены на случай линейного уравнения соболевского типа — уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной. Общие утверждения проиллюстрированы на примере нелокальной по времени задачи для уравнения в частных производных, моделирующего свободную поверхность фильтрующейся жидкости.

Ключевые слова: нелокальная задача, полугруппа операторов, уравнение соболевского типа, краевая задача.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где A — линейный оператор, порождающий в банаховом пространстве E сильно непрерывную полугруппу класса C_0, $f \in C([0, +\infty); E)$ [1].

Классической задачей, рассматриваемой для такого уравнения, является задача Коши

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

которую можно назвать *одноточечной задачей.* Методами теории полугрупп операторов доказаны существование и единственность решения однородной ($f \equiv 0$) [1] и неоднородной (см., например, [2]) задач Коши для уравнения (1.1).

В $[3, 4]$ исследовалась двухточечная краевая задача

$$\alpha u(0) - u(T) = u_0. \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Естественным обобщением задач (1.2), (1.3) является нелокальная задача вида

$$\int_0^T u(t)\, d\mu(t) = u_0, \tag{1.4}$$

где μ — функция ограниченной вариации. В частности, если

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \le T, \end{cases}$$

то задача (1.4) совпадает с задачей Коши (1.2), а если

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \alpha, & 0 < t < T, \\ \alpha - 1, & t = T, \end{cases}$$

то — с двухточечной задачей (1.3). В случае, когда A порождает аналитическую полугруппу, задачу (1.4) исследовал Э. А. Штейнвиль (см. обзор [5, с. 170, 171]).

Различные модификации условия (1.4), а также более сложные варианты нелокального по времени условия как для уравнения вида (1.1) и близких к нему эволюционных уравнений в абстрактных банаховых пространствах, так и для соответствующих уравнений и систем уравнений в частных производных рассматривались в работах А. А. Керефова [6, 7], В. В. Шелухина [8, 9], А. И. Кожанова [10, 11] и многих других авторов (см. [12–15] и ссылки в них).

В работе И. В. Тихонова [16] исчерпывающим образом исследована единственность решения задачи (1.1), (1.4) при самых общих предположениях относительно оператора A. Получен критерий единственности решения в терминах взаимного расположения собственных значений оператора A и нулей характеристической функции задачи.

В [17, 18] рассмотрена задача (1.4) для однородного уравнения (1.1) в случае, когда $d\mu(t) = \eta(t)\, dt$, $T = +\infty$, т. е. нелокальное условие имеет вид

$$\int_0^{+\infty} u(t)\eta(t)\, dt = u_0, \tag{1.5}$$

где весовая функция $\eta(t)$ считается комплекснозначной, измеримой и локально суммируемой на полупрямой $[0, +\infty)$. При различных условиях на функцию η в случае экспоненциального убывания порождаемой оператором A C_0-непрерывной полугруппы получены условия существования, единственности и устойчивости решения задачи (1.1), (1.5) при $f \equiv 0$. При этом ключевым условием является отсутствие среди точек спектра $\sigma(A)$ оператора A нулей характеристической функции задачи (1.5). В случае периодической функции η показано [18], что для однородного уравнения (1.1) условие (1.5) эквивалентно условию

$$\int_0^T u(t)\eta(t)\, dt = u_0. \tag{1.6}$$

Одна из целей данной работы — распространение результатов работы И. В. Тихонова [18] на случай задачи (1.6) для неоднородного уравнения (1.1) с функцией $f \in C([0, T]; D(A))$, где $D(A)$ — область определения замкнутого оператора A, снабженная нормой его графика. С использованием развитых в [18] подходов и методов теории вырожденных полугрупп операторов [19] в настоящей работе исследована также задача (1.6) для линейного уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t), \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Здесь оператор L принадлежит $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный и непрерывный из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$), $\ker L \neq \{0\}$, оператор M принадлежит $\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линейный замкнутый с областью определения $D(M)$, плотной в $\mathfrak{U}$, действующий в $\mathfrak{V}$). При этом рассмотрен случай, когда оператор M сильно (L,p)-радиален. Это условие, в частности, гарантирует существование вырожденной сильно непрерывной разрешающей полугруппы однородного уравнения (1.7). Эволюционные уравнения вида (1.7), не разрешенные относительно производной, часто встречаются при математическом моделировании различных процессов и явлений и образуют класс так называемых уравнений соболевского типа [20, 21].

Отметим, что в [16] критерий единственности решения задачи (1.6) для уравнения (1.7) доказан при условии лишь замкнутости операторов L и M в случае, когда точки $t = 0$ и $t = T$ являются точками вариации меры $d\mu(t)$.

Полученные в настоящей работе результаты использованы при исследовании нелокальной по времени краевой задачи для уравнения Дзекцера, описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [22].

Разрешимость задачи (1.1), (1.4) с ограниченным оператором $A \in \mathscr{L}(E)$ и задачи (1.4), (1.7) при $f \equiv 0$ в случае (L,p)-ограниченного оператора M исследовалась ранее в [23].

2. Нелокальная задача для неоднородного невырожденного уравнения

Для замкнутого оператора A его область определения $D(A)$ наделим нормой графика $\|\cdot\|_{D(A)} = \|\cdot\|_E + \|A\cdot\|_E$ и будем рассматривать $D(A)$ как линейное нормированное пространство, которое в силу замкнутости оператора A банахово.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве E, порождающий сильно непрерывную полугруппу $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ класса C_0.

Заметим, что в отличие от однородного случая (см. [18]) решение неоднородного уравнения (2.1) даже при условии порождения оператором A экспоненциально убывающей полугруппы может не быть убывающей по t функцией и тогда нелокальное условие (1.5), вообще говоря, теряет смысл. Например, в случае $E = \mathbb{R}$, $Av = -v$ при $v \in \mathbb{R}$, $g \equiv 1$ получаем экспоненциально убывающую группу операторов $U(t)v = e^{-t}v$, $t \in \mathbb{R}$. При этом неоднородное уравнение $\dot{u}(t) = -u(t) + 1$ имеет решение $u(t) = 1 - e^{-t}v$.

В [18] показано, что в случае T-периодической функции η при некоторых дополнительных условиях нелокальная задача (1.5) эквивалентна нелокальной задаче

$$\int\limits_0^T u(t)\eta(t)\,dt = u_0, \tag{2.2}$$

где T — период функции η. В данном разделе рассмотрим задачу (2.2) для неоднородного уравнения (2.1) при заданной функции $\eta : [0,T] \to \mathbb{C}$.

Обобщенным решением уравнения (2.1) в случае $g \in C([0,T];E)$ будем называть функцию

$$u(t) = U(t)v + \int_0^t U(t-s)g(s)\,ds, \quad t \in [0,T],\ v \in E.$$

В случае C_0-непрерывной полугруппы $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ такая функция непрерывна, но может быть недифференцируемой.

Функция $u \in C^1([0,T];E)$ называется *классическим решением уравнения* (2.1), если для нее выполняется равенство (2.1) в прямом смысле. Всякое классическое решение уравнения (2.1) является обобщенным. Обобщенное решение является классическим, например, при $g \in C([0,T];D(A))$, $v \in D(A)$ [2].

Обобщенным или *классическим решением задачи* (2.1), (2.2) называется соответственно обобщенное или классическое решение уравнения (2.1), если для него выполняется условие (2.2).

Определим характеристическую функцию нелокальной задачи

$$\chi(z) = \int_0^T e^{zt}\eta(t)\,dt, \tag{2.3}$$

которая, как известно [18], целая, и оператор

$$B_T v = \int_0^T U(t)v\eta(t)\,dt, \quad v \in E.$$

Используя схему доказательства подобных утверждений из [18], докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть сильно непрерывная полугруппа $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ класса C_0 порождается оператором A, $\eta \in C^1[0,T]$. Тогда $\operatorname{im} B_T \subset D(A)$, $AB_T \in \mathscr{L}(E)$. Если, кроме того, оператор A непрерывно обратим и $\eta(0) \neq 0$, то ограниченный обратный оператор $(AB_T)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A.*

Доказательство. Для $v \in E$ в силу замкнутости оператора A

$$AB_T v = \int_0^T AU(t)v\eta(t)\,dt = \int_0^T U'(t)v\eta(t)\,dt = U(T)v\eta(T) - v\eta(0) - \int_0^T U(t)v\eta'(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{im} B_T \subset D(A)$, $AB_T \in \mathscr{L}(E)$.

По теореме 16.3.5 из [1] если оператор A неограниченный, то в силу равенства (2.4)

$$\sigma(-AB_T) = \eta(0) + \sigma(-AB_T - \eta(0)I)$$
$$= \left\{ \eta(0) + \int_0^T e^{\lambda t}\eta'(t)\,dt - e^{\lambda T}\eta(T) : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{\eta(0)\}$$

$$= \left\{ -\lambda \int\limits_0^T e^{\lambda t} \eta(t)\, dt : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{\eta(0)\} = \{-\lambda\chi(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \cup \{\eta(0)\}.$$

При ограниченном операторе A

$$\sigma(-AB_T) = \{-\lambda\chi(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Из непрерывной обратимости оператора A и условия $\eta(0) \neq 0$ следует, что $0 \in \sigma(-AB_T)$ тогда и только тогда, когда нуль характеристической функции χ принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A. Поэтому оператор $-AB_T$, а значит, и оператор AB_T, непрерывно обратимы в том и только в том случае, когда ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть оператор A замкнут и непрерывно обратим. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор A^n замкнут и из сходимости последовательности в норме графика оператора A^n следует ее сходимость в норме графика оператора A^k при $k \in \mathbb{N}$, $k < n$.*

Доказательство. Пусть для последовательности $\{v_m\} \subset D(A^2)$

$$\lim_{m\to\infty} v_m = v \in E, \quad \lim_{m\to\infty} A^2 v_m = w \in E.$$

Тогда

$$A^{-1} \lim_{m\to\infty} A^2 v_m = \lim_{m\to\infty} A v_m = A^{-1} w \in E.$$

Из замкнутости оператора A следует, что $v \in D(A)$, $Av = A^{-1}w$. По определению обратного оператора $Av \in D(A)$, $v \in D(A^2)$, $A^2 v = w$. Это и означает замкнутость оператора A^2. Повторив такие рассуждения n раз, получим замкнутость оператора A^n при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} A^n v_m = w \in E$. Тогда в силу непрерывности оператора $A^{k-n} = (A^{-1})^{n-k}$ при $k < n$ получим $A^{k-n} \lim\limits_{m\to\infty} A^n v_m = \lim\limits_{m\to\infty} A^k v_m = A^{k-n} w \in E$. Отсюда следует второе утверждение данной леммы. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *непрерывно обратимый оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ класса C_0;*

(ii) $\eta \in C^1[0,T]$, $\eta(0) \neq 0$;

(iii) *ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A;*

(iv) $g \in C([0,T]; D(A))$.

Тогда

(i) *при всех $u_0 \in D(A)$ существует единственное обобщенное решение $u \in C([0,T]; E)$ задачи (2.1), (2.2), при этом*

$$\|u\|_{C([0,T];E)} \leq C(\|Au_0\|_E + \|g\|_{C([0,T];D(A))}),$$

где константа C не зависит от u_0 и g;

(ii) *если $u_0 \in E \setminus D(A)$, то не существует обобщенного решения задачи (2.1), (2.2);*

(iii) *если* $g \in C([0,T]; D(A^2))$, $\eta \in C^2[0,T]$, *то обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *является классическим тогда и только тогда, когда* $u_0 \in D(A^2)$.

Доказательство. Заметим, что так как $g \in C\left([0,T]; D(A)\right)$, то

$$A\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds = \int\limits_0^t U(t-s)Ag(s)\,ds \in C\left([0,T]; E\right),$$

поэтому

$$\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds \in C\left([0,T]; D(A)\right), \quad \int\limits_0^T A\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt$$

сходится. Следовательно, в силу замкнутости оператора A

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(A).$$

Подставив обобщенное решение в (2.2), получим

$$\int\limits_0^T u(t)\eta(t)\,dt = \int\limits_0^T U(t)v\eta(t)\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt = u_0. \tag{2.5}$$

При доказательстве леммы 2.1 было показано, что $B_T v \in D(A)$ при любом $v \in E$, поэтому равенство (2.5) возможно только в случае $u_0 \in D(A)$. Это доказывает утверждение (ii) теоремы.

Так как оператор A непрерывно обратим, (2.5) выполняется для $u_0 \in D(A)$, если и только если

$$AB_T v + A\int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt = Au_0, \tag{2.6}$$

т. е.

$$v = (AB_T)^{-1}\left(Au_0 - A\int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt\right). \tag{2.7}$$

Взяв такое $v \in E$ в определении обобщенного решения, получим единственное обобщенное решение задачи (2.1), (2.2). Из последнего равенства и вида обобщенного решения следует также оценка на его норму из утверждения (i) теоремы.

Для любого $v \in E$ при $T > 0$ имеем $U(T)v\eta(T) \in D(A)$ в силу свойств операторов полугруппы [1]. Кроме того, при $v \in D(A)$ интеграл

$$A\int\limits_0^T U(t)v\eta'(t)\,dt = \int\limits_0^T U(t)Av\eta'(t)\,dt$$

сходится, поэтому в силу равенств (2.4), (2.6)

$$Au_0 - A\int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt = AB_T v \in D(A).$$

Для $g \in C\,([0,T]; D(A))$ обобщенное решение является классическим в точности тогда, когда вектор v из (2.7) принадлежит $D(A)$. В этом случае

$$u_0 - \int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(A^2).$$

Если $g \in C([0,T]; D(A^2))$, то

$$A^2 \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds = \int\limits_0^t U(t-s)A^2 g(s)\,ds \in C([0,T]; E),$$

тем самым

$$\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds \in C([0,T]; D(A^2)).$$

Таким образом, в силу замкнутости оператора A^2 по лемме 2.2

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(A^2)$$

и поэтому $u_0 \in D(A^2)$.

Пусть $u_0 \in D(A^2)$, тогда при $g \in C([0,T]; D(A^2))$ согласно (2.6) имеем $AB_T v \in D(A)$, где вектор v определяется формулой (2.7). Если $\eta \in C^2[0,T]$, то в силу того, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^T AU(t)v\eta'(t)\,dt = U(T)v\eta'(T) - v\eta'(0) - \int\limits_0^T U(t)v\eta''(t)\,dt,$$

из равенства (2.4) следует, что $v \in D(A)$ и соответствующее обобщенное решение является классическим. □

Лемма 2.3. *Пусть сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ *класса* C_0 *порождается оператором* A, $\eta \in C^n[0,T]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\eta^{(k)}(0) = 0$, $\eta^{(k)}(T) = 0$, $k = 0, \ldots, n-2$. *Тогда* $\operatorname{im} B_T \subset D(A^n)$, $A^n B_T \in \mathscr{L}(E)$. *Если, кроме того, оператор* A *непрерывно обратим и* $\eta^{(n-1)}(0) \neq 0$, *то ограниченный обратный оператор* $(A^n B_T)^{-1}$ *существует тогда и только тогда, когда ни один нуль характеристической функции* χ *не принадлежит спектру* $\sigma(A)$ *оператора* A.

Доказательство. Для $v \in E$ по индукции нетрудно доказать, что

$$A^n B_T v = A^{n-1} \int\limits_0^T U'(t)v\eta(t)\,dt$$

$$= A^{n-1}U(T)v\eta(T) - A^{n-1}v\eta(0) - A^{n-1}\int\limits_0^T U(t)v\eta'(t)\,dt = -A^{n-2}\int\limits_0^T U'(t)v\eta'(t)\,dt$$

$$\cdots = (-1)^{n-1}U(T)v\eta^{(n-1)}(T) + (-1)^n v\eta^{(n-1)}(0) + (-1)^n \int\limits_0^T U(t)v\eta^{(n)}(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{im} B_T \subset D(A^n)$, $A^n B_T \in \mathscr{L}(E)$.

По теореме 16.3.5 в [1] спектр $\sigma((-A)^n B_T)$ состоит из множества точек вида

$$\eta^{(n-1)}(0) + \int\limits_0^T e^{\lambda t}\eta^{(n)}(t)\,dt - e^{\lambda T}\eta^{(n-1)}(T) = (-\lambda)^n \int\limits_0^T e^{\lambda t}\eta(t)\,dt = (-\lambda)^n\chi(\lambda),$$

где $\lambda \in \sigma(A)$, дополненного в случае неограниченного оператора A точкой $\eta^{(n-1)}(0)$. Рассуждая далее, как при доказательстве леммы 2.1, получим требуемое. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *непрерывно обратимый оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{U(t) \in \mathscr{L}(E) : t \geq 0\}$ класса C_0;*

(ii) $\eta \in C^n[0,T]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\eta^{(k)}(0) = 0$, $\eta^{(k)}(T) = 0$ *при* $k = 0, \dots, n-2$, $\eta^{(n-1)}(0) \neq 0$;

(iii) *ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора A;*

(iv) $g \in C([0,T]; D(A^n))$.

Тогда

(i) *при всех $u_0 \in D(A^n)$ существует единственное обобщенное решение $u \in C([0,T]; E)$ задачи* (2.1), (2.2), *при этом*

$$\|u)\|_{C([0,T];E)} \leq C(\|A^n u_0\|_E + \|g\|_{C([0,T];D(A^n))}),$$

где константа C не зависит от u_0 и g;

(ii) *если $u_0 \in E \setminus D(A^n)$, то не существует обобщенного решения задачи* (2.1), (2.2);

(iii) *если $g \in C([0,T]; D(A^{n+1}))$, $\eta \in C^{n+1}[0,T]$, то обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *является классическим тогда и только тогда, когда $u_0 \in D(A^{n+1})$.*

Доказательство. Для обобщенного решения из условия (2.2) получим

$$\int\limits_0^T u(t)\eta(t)\,dt = B_T v + \int\limits_0^T\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt = u_0. \tag{2.9}$$

В силу леммы 2.3 $B_T v \in D(A^n)$, поэтому с учетом условия (iv) теоремы равенство (2.9) возможно только в случае $u_0 \in D(A^n)$. Утверждение (ii) теоремы доказано.

Поскольку оператор A непрерывно обратим, для $u_0 \in D(A^n)$ равенство (2.9) равносильно тому, что

$$A^n B_T v + A^n \int\limits_0^T\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt = A^n u_0,$$

т. е.

$$v = (A^n B_T)^{-1}\left(A^n u_0 - A^n \int\limits_0^T\int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt\right).$$

При таком $v \in E$ получается единственное обобщенное решение задачи (2.1), (2.2). Отсюда же следует оценка на норму обобщенного решения из утверждения (i) теоремы.

Согласно равенствам (2.8), (2.9) при $v \in D(A)$ выполняется

$$A^n B_T v = A^n u_0 - A^n \int\limits_0^T \int\limits_0^t U(t-s)g(s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(A). \tag{2.10}$$

Поэтому в случае $g \in C([0,T]; D(A^{n+1}))$ получается $u_0 \in D(A^{n+1})$.

Если $u_0 \in D(A^{n+1})$, то при $g \in C([0,T]; D(A^{n+1}))$ в силу (2.10) $A^n B_T v \in D(A)$. В этом случае принадлежность $v \in D(A)$ доказывается с помощью равенства (2.8) и того, что $\eta \in C^{n+1}[0,T]$, так же, как в теореме 2.1 при $n = 1$. $\square$

Замечание 2.1. Из доказательств теорем 2.1 и 2.2 видно, что дополнительная гладкость функции η используется только при доказательстве достаточности условия $u_0 \in D(A^{n+1})$ для существования классического решения, но не требуется для необходимости этого условия.

3. Условия на операторы в вырожденном эволюционном уравнении

Рассмотрим линейное однородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Далее везде предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение (3.1) будем также называть *вырожденным эволюционным уравнением.* Сформулируем условия на операторы в этом уравнении, которые будут использоваться в дальнейшем, и некоторые утверждения, доказанные ранее в [19].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Введем обозначения

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Определение 3.1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1} f\|_{\mathfrak{V}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$.

Замечание 3.1. Эквивалентность условий определения 3.1 аналогичным более громоздким условиям, использованным в работе [19], доказана в [24].

Определение 3.2. Семейство операторов $\{U(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ называется *разрешающей полугруппой уравнения* (3.1), если

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)\ \forall s,t \geq 0$;

(ii) при любом u_0 из некоторого плотного линеала в пространстве $\mathfrak{U}$ функция $u(t) = U(t)u_0$ есть классическое решение уравнения (3.1);

(iii) для любого семейства операторов $\{V(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ со свойствами (i), (ii) выполняется $\operatorname{im} V(0) \subset \operatorname{im} U(0)$.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0 = \ker\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$; $\mathfrak{U}^1$ — замыкание образа оператора $\operatorname{im}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание образа $\operatorname{im}\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(D(M_k) = D(M) \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 3.1 [19]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$*;*

(ii) $L_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0,1$*;*

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$*;*

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p*;*

(v) *существует разрешающая уравнение* (3.1) *сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{U(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$*;*

(vi) *оператор* $L_1^{-1}M_1$ *порождает* C_0*-непрерывную полугруппу операторов* $\{U_1(t) = U(t)|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1) : t \geq 0\}$.

Замечание 3.2.. В случае $\ker L \neq \{0\}$ единицей $U(0)$ разрешающей полугруппы является нетривиальный проектор, для которого $\ker L \subset \ker U(0) = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} U(0) = \mathfrak{U}^1$.

Как и прежде, область определения $D(M)$ замкнутого оператора M будем расматривать как банахово пространство с нормой графика $\|\cdot\|_{D(M)} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$.

Теорема 3.2 [19]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in D(M)$, функция $f : [0,T] \to \mathfrak{V}$ такова, что $L_1^{-1}Qf \in C^1([0,T];D(M))$, $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}^0)$,*

$$(I-P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0).$$

Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t)$, $t \in [0,T]$. При этом

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qf(s)\,ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t).$$

4. Нелокальная задача для неоднородного уравнения соболевского типа

При $T > 0$ рассмотрим нелокальную задачу

$$\int_0^T u(t)\eta(t)\,dt = u_0 \tag{4.1}$$

для неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

В случае сильно (L,p)-радиального оператора M *обобщенным решением уравнения* (4.2) в силу теоремы 3.2 будем называть функцию

$$u(t)=U(t)v+\int\limits_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t) \tag{4.3}$$

при $v\in\mathfrak{U}$, $Qf\in C\left([0,T];\mathfrak{V}\right)$, $(I-Q)f\in C^p\left([0,T];\mathfrak{V}\right)$.

Функция $u\in C^1\left([0,T];\mathfrak{U}\right)$ называется *классическим решением уравнения* (4.2), если для нее равенство (4.2) выполняется непосредственно. Всякое классическое решение уравнения (4.2) является обобщенным по теореме 3.2. Обобщенное решение уравнения (4.2) является классическим в случае, когда, например, $v\in D(M)$, $Qf\in C\left([0,T];D(M)\right)$, $(I-Q)f\in C^{p+1}\left([0,T];\mathfrak{V}\right)$.

Обобщенным или *классическим решением задачи* (4.1), (4.2) называется соответственно обобщенное или классическое решение уравнения (4.2), если для него выполняется условие (4.1).

Лемма 4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

$$\sigma^L(M)=\sigma\big(L_1^{-1}M_1\big).$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1 имеем

$$\begin{aligned}(\mu L-M)^{-1}&=(\mu L_0-M_0)^{-1}(I-Q)+(\mu L_1-M_1)^{-1}Q\\&=(\mu H-I)^{-1}M_0^{-1}(I-Q)+\big(\mu I-L_1^{-1}M_1\big)^{-1}L_1^{-1}Q\\&=-\sum_{k=0}^{p}\mu^kH^kM_0^{-1}(I-Q)+\big(\mu I-L_1^{-1}M_1\big)^{-1}L_1^{-1}Q.\end{aligned}$$

Поэтому непрерывный оператор $(\mu L-M)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})$ существует в том и только в том случае, когда существует непрерывный оператор $\big(\mu I-L_1^{-1}M_1\big)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{U}^1)$. $\square$

В следующем утверждении используется прежняя характеристическая функция (2.3).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *оператор M сильно (L,p)-радиален и непрерывно обратим;*

(ii) $\eta\in C^1\left[0,T\right]$, $\eta(0)\neq 0$*;*

(iii) *ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит L-спектру $\sigma^L(M)$ оператора M;*

(iv) $L_1^{-1}Qf\in C([0,T];D(M))$, $(I-Q)f\in C^p([0,T];\mathfrak{V})$*;*

(v) $(I-P)u_0=-\int\limits_0^T\sum\limits_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\eta(t)\,dt.$

Тогда

(i) *для $Pu_0\in D(M_1)$ существует единственное обобщенное решение $u\in C([0,T];\mathfrak{U})$ задачи* (4.1), (4.2), *при этом*

$$\|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})}\leq C\big(\|MPu_0\|_{\mathfrak{F}}+\big\|L_1^{-1}Qf\big\|_{C([0,T];D(M))}+\|(I-Q)f\|_{C^p([0,T];\mathfrak{F})}\big),$$

где константа C не зависит от u_0 и f;

(ii) *если $Pu_0\in\mathfrak{U}^1\setminus D(M_1)$, то не существует обобщенного решения задачи* (4.1), (4.2)*;*

(iii) *при* $L_1^{-1}Qf \in C\big([0,T];D\big((L_1^{-1}M_1)^2\big)\big)$, $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, $\eta \in C^2[0,T]$ *обобщенное решение задачи* (4.1), (4.2) *является классическим тогда и только тогда, когда* $Pu_0 \in D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^2\big)$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что в силу утверждений (ii) и (iii) теоремы 3.1 обратимость оператора M является необходимым и достаточным условием обратимости оператора $L_1^{-1}M_1$.

Условие (4.1) для обобщенного решения имеет вид

$$\int_0^T U(t)v\eta(t)\,dt + \int_0^T\int_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qf(s)\,ds\eta(t)\,dt - \int_0^T \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\eta(t)\,dt = u_0. \quad (4.4)$$

Поскольку $U(t)v = U(t)U(0)v = U_1(t)Pv$, включение

$$\int_0^T U(t)v\eta(t)\,dt \in D(L_1^{-1}M_1) = D(M_1)$$

при любом $v \in \mathfrak{U}$ следует из лемм 2.1, 4.1 и теоремы 3.1(vi). Включение

$$\int_0^T\int_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qf(s)\,ds\eta(t)\,dt = \int_0^T\int_0^t U_1(t-s)L_1^{-1}Qf(s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(M_1)$$

при $L_1^{-1}Qf \in C([0,T];D(M))$ доказывается так же, как в теореме 2.1. Отсюда следует необходимость условия $Pu_0 \in D(M_1)$, а также условия (v) данной теоремы для существования обобщенного решения.

Далее,

$$\int_0^T U_1(t)Pv\eta(t)\,dt = Pu_0 - \int_0^T\int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds\eta(t)\,dt \in D(M_1),$$

$$Pv = F_T^{-1}\left(L_1^{-1}M_1Pu_0 - L_1^{-1}M_1\int_0^T\int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds\eta(t)\,dt\right), \quad (4.5)$$

где $F_T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1)$ — обратный оператор к оператору

$$F_Tw = L_1^{-1}M_1\int_0^T U_1(t)w\eta(t)\,dt \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1),$$

существующий по лемме 2.1 в силу теоремы 3.1(vi). Таким образом, проекция $(I-P)v$ элемента v из формулы (4.3) может быть произвольной, однако она и не влияет на значение обобщенного решения $u(t)$. Формально можно задать несколько обобщенных решений задачи (4.1), (4.2) в виде (4.3) с v_1 и v_2 в качестве v, например. Но в силу приведенных рассуждений должно при этом выполняться равенство $Pv_1 = Pv_2$, поэтому

$$u_1(t) = U(t)v_1 + \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)$$

$$= U(t)v_2 + \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t) = u_2(t).$$

Следовательно, выбрав любое $v \in \mathfrak{U}$, для которого Pv задается формулой (4.5), получим единственное обобщенное решение задачи (4.1), (4.2).

Из равенства (4.5) и определения обобщенного решения следует оценка на его норму.

Используя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 2.1, получим при $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ необходимое, а при дополнительном условии $\eta \in C^2[0,T]$ и достаточное условие существования классического решения в виде

$$Pu_0 - \int_0^T \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qf(t-s)\,ds\eta(t)\,dt \in D((L_1^{-1}M_1)^2).$$

В случае $L_1^{-1}Qf \in C\big([0,T];D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^2\big)\big)$ отсюда следуют необходимость и достаточность условия $Pu_0 \in D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^2\big)$ для существования классического решения. $\square$

Замечание 4.1. Из вида оператора H и условия (v) теоремы 4.1 следует, что включение $Pu_0 \in D(M_1)$ равносильно тому, что $u_0 \in D(M)$.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) *оператор M сильно (L,p)-радиален и непрерывно обратим;*

(ii) $\eta \in C^n[0,T]$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\eta^{(k)}(0) = \eta^{(k)}(T) = 0$ *для* $k = 0,\dots,n-2$, $\eta^{(n-1)}(0) \neq 0$;

(iii) *ни один нуль характеристической функции χ не принадлежит L-спектру $\sigma^L(M)$ оператора M;*

(iv) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T];D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^n\big)$, $(I-Q)f \in C^p([0,T];\mathfrak{V})$;

(v) $(I-P)u_0 = -\int_0^T \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(t)\eta(t)\,dt$.

Тогда

(i) *если $Pu_0 \in D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^n\big)$, то существует единственное обобщенное решение $u \in C([0,T];\mathfrak{U})$ задачи (4.1), (4.2), при этом*

$$\|u\|_{C([0,T];\mathfrak{U})} \le C\big(\big\|\big(L_1^{-1}M_1\big)^n Pu_0\big\|_{\mathfrak{F}} + \big\|L_1^{-1}Qf\big\|_{C([0,T];D((L_1^{-1}M_1)^n))} + \|(I-Q)f\|_{C^{p+1}([0,T];\mathfrak{F})}\big),$$

где константа C не зависит от u_0 и f;

(ii) *если $Pu_0 \in \mathfrak{U}^1 \setminus D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^n\big)$, то не существует обобщенного решения задачи (4.1), (4.2);*

(iii) *при $L_1^{-1}Qf \in C\big([0,T];D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^{n+1}\big)\big)$, $(I-Q)f \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, $\eta \in C^{n+1}[0,T]$ обобщенное решение задачи (4.1), (4.2) является классическим тогда и только тогда, когда $Pu_0 \in D\big(\big(L_1^{-1}M_1\big)^{n+1}\big)$.*

Доказательство. Утверждения теоремы 4.2 доказываются так же, как и аналогичные утверждения в теореме 4.1, но с использованием леммы 2.3 и теоремы 2.2 вместо леммы 2.1 и теоремы 2.1. $\square$

5. Нелокальная по времени задача для уравнения Дзекцера

В качестве примера рассмотрим нелокальную по времени краевую задачу

$$\int_0^T z(x,t)\eta(t)\,dt = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$(1-\theta)z(x,t) + \theta\frac{\partial z}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{5.2}$$

для уравнения Дзекцера [22]

$$(\lambda - \Delta)z_t(x,t) = \Delta z(x,t) - \beta\Delta^2 z(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{5.3}$$

описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости. Здесь ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу, $\theta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

Пусть

$$\mathfrak{V} = L_2(\Omega), \quad \mathfrak{U} = H^2_\theta(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega) : (1-\theta)u(x) + \theta\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\right\},$$

$$D(M) = \left\{u \in H^4(\Omega) : (1-\theta)\Delta^k u(x) + \theta\frac{\partial \Delta^k u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ k = 0,1\right\},$$

$$L = \lambda - \Delta \in \mathscr{L}\big(H^2_\theta(\Omega); L_2(\Omega)\big), \quad M = \Delta - \beta\Delta^2 \in \mathscr{C}l\big(H^2_\theta(\Omega); L_2(\Omega)\big).$$

Таким образом, задача (5.1)–(5.3) редуцирована к задаче (4.1), (4.2). Сформулируем в терминах данной задачи те условия теорем разд. 4, которые неочевидны.

Обозначим через λ_m, $m \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H^2_\theta(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Кроме того, пусть $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортонороми-рованная в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ система соответствующих собственных функций этого оператора. Будем считать, что $\lambda_m = \lambda$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, т. е. уравнение (5.3) не разрешимо относительно z_t.

Известно [25, теорема 5.1], что в условиях данного раздела оператор M сильно $(L,0)$-радиален, если $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1/\beta$. При этом L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из всех точек вида

$$\mu_m = \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m},$$

где $\lambda_m \neq \lambda$. Условие непрерывной обратимости оператора M означает, что $\lambda_m - \beta\lambda_m^2 \neq 0$, т. е. $\lambda_m \neq 0$, $\lambda_m \neq 1/\beta$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Если $\theta = 1$ и соответственно задано краевое условие Неймана, то это условие заведомо не выполняется.

Условие (iii) теоремы 4.1 или теоремы 4.2 в данном случае означает, что для всех $m \in \mathbb{N}$, при которых $\lambda_m \neq \lambda$, имеем

$$\int_0^T e^{\frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}t}\eta(t)\,dt \neq 0.$$

Наконец, условие (v) теоремы 4.1 или теоремы 4.2 для данной задачи выглядит следующим образом: при $\lambda_m = \lambda$

$$(\lambda - \beta\lambda^2)\langle u_0, \varphi_m\rangle = \int\limits_0^T \langle f(\cdot, t), \varphi_m\rangle \eta(t)\, dt.$$

Действительно, при $p = 0$ это условие принимает вид

$$M(I - P)u_0 = -\int\limits_0^T (I - Q)f(t)\eta(t)\, dt,$$

так как $I - P = I - Q = \sum\limits_{\lambda_m = \lambda} \langle \cdot, \varphi_m\rangle \varphi_m$, $M\varphi_m = \big(\lambda_m - \beta\lambda_m^2\big)\varphi_m$.

Оценку на норму обобщенного решения задачи (5.1)–(5.3) в общем случае можно записать в виде

$$\|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq C(\|u_0\|_{H^{2n+2}(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T];H^{2n}(\Omega))} + \|f\|_{C^1([0,T];L_2(\Omega))}\big).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
3. *Эйдельман Ю. С.* Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН Укр. ССР. Сер. А. 1983. Т. 4, № ???????. С. 15–18.
4. *Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
5. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховои пространстве // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 130–264. (Итоги науки и техники).
6. *Керефов А. А.* Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 74–78.
7. *Керефов А. А., Шхануков-Лафишев М. Х., Кулиев Р. С.* Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова // Неклассические уравнения математической физики: Тр. семинара, посвященного 60-летию проф. В. Н. Врагова. 2005. С. 152–159.
8. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 191–207.
9. *Шелухин В. В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 701–724.
10. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
11. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
12. *Chabrowski J.* On the nonlocal problem with a functional for parabolic equation // Funkcial. Ekvac. Ser. Int. 1984. V. 27, N 1. P. 101–123.
13. *Byszewski L, Lakshmikantham V.* Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space // Appl. Anal. 1991. V. 40, N 1. P. 11–19.
14. *Agarwal R. P., Bochner M., Shakhmurov V. B.* Linear and nonlinear nonlocal boundary value problems for differential-operator equations // Appl. Anal. 2006. V. 85, N 6–7. P. 701–719.
15. *Уварова М. В.* О некоторых нелокальных краевых задачах для эволюционных уравнений // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 179–207.
16. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.

17. *Тихонов И. В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841–843.

18. *Тихонов И. В.* Нелокальная задача с «периодическим» интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Интегральные преобразования и специальные функции. 2004. Т. 4, № 1. С. 49–69.

19. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.

20. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

21. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

22. *Дзекцер Е. С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.

23. *Сагадеева М. А.* Нелокальная задача для уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченным оператором // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 10, № 6. С. 54–62.

24. *Федоров В. Е.* Свойства псевдорезольвент и условие существования вырожденной полугруппы операторов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 11, № 20. С. 12–19.

25. *Федоров В. Е.* О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 189–217.

Статья поступила ?? февраля 2014 г.

Фёдоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
`kar@csu.ru`

Иванова Наталья Дмитриевна
Южно-Уральский гос. университет, кафедра математического анализа,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
`natalia.d.ivanova@gmail.com`

Фёдорова Юлия Юрьевна
Челябинский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
`yulia_f74@mail.ru`