Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 517.545

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИТСА О ТОЧКАХ ВЕЙЕРШТРАССА

М. П. Лимонов

Аннотация. Пусть X — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, σ — автоморфизм X порядка n и g^* — род фактор-поверхности $X^* = X/\langle\sigma\rangle$. В 1951 г. Шёнеберг получил достаточное условие для того, чтобы неподвижная точка $P \in X$ автоморфизма σ являлась точкой Вейерштрасса на X. А именно, он показал, что P — точка Вейерштрасса на X, если $g^* \neq [g/n]$, где $[x]$ — целая часть x.

Несколько позже Левитс доказал следующую теорему, эквивалентную теореме Шёнеберга: *если нетривиальный автоморфизм σ оставляет неподвижными более четырех точек на X, то все они являются точками Вейерштрасса.*

Эти утверждения связаны с понятием регулярного накрытия. В данной работе теорема Левитса обобщена на случай нерегулярных накрытий, а также получены некоторые связанные с этим следствия.

Ключевые слова: риманова поверхность, точка Вейерштрасса, регулярное накрытие, нерегулярное накрытие.

1. Введение

Пусть X — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Напомним, что точка $P \in X$ называется *точкой Вейерштрасса*, если на X существует мероморфная функция, которая в точке P имеет полюс порядка $\leq g$ и регулярна в других точках. Пусть σ — автоморфизм (конформный гомеоморфизм на себя) порядка n поверхности X, и g^* — род фактор-поверхности $X/\langle\sigma\rangle$. В 1951 г. Шёнеберг в [1] получил достаточное условие для того, чтобы неподвижная точка $P \in X$ автоморфизма σ являлась точкой Вейерштрасса на X.

Теорема 1 [1]. *Неподвижная точка P автоморфизма σ порядка n является точкой Вейерштрасса, если $g^* \neq [g/n]$, где $[x]$ — целая часть x.*

Эта теорема связана с понятием *регулярного* накрытия $\pi : X \to X^*$, называемого также *нормальным* или *накрытием Галуа*. Это такое непостоянное голоморфное отображение $\pi : X \to X^*$, что для любой точки $P^* \in X^*$ и для любой пары ее поднятий $P_1, P_2 \in X$ существует гомеоморфизм $\varphi : X \to X$, переводящий P_1 в P_2 и такой, что $\pi \circ \varphi = \pi$. Непостоянное голоморфное отображение римановых поверхностей, для которого указанное условие не выполняется, называется *нерегулярным накрытием*.

В разд. 2 прослеживается развитие указанной теоремы с момента ее появления и до нашего времени. Предварительные понятия и необходимые определения даны в разд. 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00210).

2. Исторический обзор

Пусть, как и в разд. 1, X — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$ и σ — автоморфизм X порядка n. Обозначим через t число неподвижных точек σ. В 1963 г. Левитс опубликовал следующую теорему, которая эквивалентна теореме Шёнеберга.

Теорема 2 [2, теорема 6]. *Если точка P не является точкой Вейерштрасса на X и $\sigma(P) = P$, то автоморфизм σ имеет не менее двух и не более четырех неподвижных точек и род g^* поверхности $X/\langle\sigma\rangle$ дается формулой $g^* = [g/n]$. В терминах представления g в виде $g = g^*n + r$ возможны только следующие случаи:*

(a) $r = 0$, $g = g^*n$, $t = 2$;
(b) $r = \frac{n-1}{2}$, $g = \left(g^* + \frac{1}{2}\right)n - \frac{1}{2}$, $t = 3$;
(c) $r = n - 1$, $g = (g^* + 1)n - 1$, $t = 4$.

В отличие от теоремы 1 теорема 2 включает информацию о числе неподвижных точек автоморфизма σ. Теорема 2 имеет два следствия, которые приведены в [3]. Первое говорит о том, что если σ — нетривиальный автоморфизм компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$, имеющий более четырех неподвижных точек, то все эти точки являются точками Вейерштрасса. Доказательство этого утверждения можно найти в [4, теорема V.1.7] Отметим, что формулировка именно этого следствия обычно приводится в литературе как теорема Левитса. Второе следствие утверждает, что если σ имеет единственную неподвижную точку P и суммарный порядок ветвления B (см. разд. 3, формула Римана — Гурвица) накрытия $\pi : X \to X^*$ удовлетворяет неравенству $B \geq 4n - 2$ или $B \leq 2n - 4$, то P является точкой Вейерштрасса.

Более подробно случай единственной неподвижной точки автоморфизма σ разобран в [5]: если автоморфизм σ имеет единственную неподвижную точку P, то она должна быть точкой Вейерштрасса, за исключением случая, когда σ имеет порядок 6 и $g = 6g^* + 1$. В этом исключительном случае накрытие $X \to X/\langle\sigma\rangle$ разветвлено над тремя точками. Слои над такими точками состоят из неподвижных точек σ, σ^2, σ^3 соответственно. Суммарный порядок ветвления B такого накрытия равен 12, и точка P является q-точкой Вейерштрасса, где $q \geq 2$ (по поводу обобщенных точек Вейерштрасса см. [6]).

В [7] переформулирована и доказана теорема 2 в терминах фуксовых групп. В формулировке из [7] случаи (a)–(c) записаны с помощью сигнатур таких групп.

В [8, 9] теорема Левитса обобщена на случай произвольного алгебраического функционального поля одной переменной над алгебраически замкнутым основным полем почти произвольной характеристики.

Наконец, теорема 2 обобщена в [10] на случай кривых Горнстейна.

3. Предварительные понятия

Опишем понятия, используемые ниже. Более подробно ознакомиться с ними можно в [4] или [11]. В этом тексте под римановой поверхностью понимается одномерное компактное связное комплексное многообразие без границы.

Рассмотрим непостоянное голоморфное отображение f степени n между римановыми поверхностями X и Y родов g и γ соответственно. *Суммарный порядок ветвления* отображения f определяется по формуле $B = \sum\limits_{P \in X} b_f(P)$, где $b_f(P)$ — порядок ветвления f в P (т. е. число $n-1$, если в локальных координатах отображение f записывается в виде $w = z^n$).

Следующая теорема дает связь между родом поверхности X, родом Y и степенью отображения n.

Теорема (формула Римана — Гурвица). *Верно соотношение*

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B.$$

При доказательстве основных результатов используем технику дивизоров на римановых поверхностях. Дивизоры — удобные объекты для описания нулей и полюсов мероморфных функций.

Определение 1. *Дивизор* на римановой поверхности X — это формальный ряд $D = \sum_{P\in X} \alpha(P)P$, где $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ и $\alpha(P) \neq 0$ только для конечного числа точек $P \in X$. Для дивизоров D и $D' = \sum_{P\in X} \beta(P)P$ определяется

$$D \pm D' = \sum_{P\in X} (\alpha(P) \pm \beta(P))\, P, \quad \deg D = \sum_{P\in X} \alpha(P).$$

Множество всех дивизоров на X по сложению образует абелеву группу, которую обозначим через $\mathrm{Div}(X)$. На этом множестве также вводится частичный порядок, а именно $D \leq D'$, если $\alpha(P) \leq \beta(P)$ для каждой точки $P \in X$.

Определение 2. Пусть X — риманова поверхность и $\mathscr{M}(X)$ — множество всех мероморфных функций на X. *Дивизором мероморфной функции* $f \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\}$ называется дивизор $(f) = \sum_{P\in X} \mathrm{ord}_P(f)P$, где порядок $\mathrm{ord}_P(f)$ функции f в точке $P \in X$ определяется по формуле

$$\mathrm{ord}_P(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ голоморфна и отлична от нуля в } P, \\ k, & \text{если } f \text{ имеет нуль кратности } k \text{ в } P, \\ -k, & \text{если } f \text{ имеет полюс порядка } k \text{ в } P. \end{cases}$$

Определение 3. Для дивизора $D \in \mathrm{Div}(X)$ определяется множество

$$L(D) = \{f \in \mathscr{M}(X) \mid (f) \geq D\}.$$

Это множество является векторным пространством. Его размерность обозначим через $l(D)$.

Рассмотрим пример. Пространство $L(D)$ для дивизора $D = 3P - 4Q$ состоит из всех таких функций $f \in \mathscr{M}(X)$, которые голоморфны в $X \setminus \{Q\}$, обязательно имеют нуль кратности ≥ 3 в точке P (допускаются нули и в других точках на X) и могут иметь полюс в Q порядка ≤ 4.

Следующая теорема является важным инструментом для проверки того, что $L(D)$ содержит непостоянные функции.

Теорема (неравенство Римана [4, с. 72]). *Пусть X — риманова поверхность рода g и $D \in \mathrm{Div}(X)$. Тогда верно неравенство $l(D) \geq -\deg D - g + 1$.*

Определение 4. Точка P на римановой поверхности X рода $g > 1$ называется *точкой Вейерштрасса*, если на X существует мероморфная функция с полюсом порядка $\leq g$ в P и голоморфная во всех других точках. На языке дивизоров точка P является точкой Вейерштрасса, если и только если $l(-gP) \geq 2$.

4. Основные результаты

Регулярные и нерегулярные накрытия римановых поверхностей вместе образуют непостоянные голоморфные отображения этих поверхностей. В дальнейшем все голоморфные отображения предполагаются непостоянными. Неподвижная точка автоморфизма σ порядка n римановой поверхности X является точкой ветвления регулярного накрытия $X \to X/\langle\sigma\rangle$. Порядок ветвления в такой точке равен $n-1$. Основная идея настоящей работы заключается в том, чтобы для произвольного голоморфного отображения римановых поверхностей в качестве аналога неподвижной точки рассматривать точки, порядок ветвления в которых равен $n-1$, где n — степень отображения. Такие точки будем называть *точками полного ветвления*. Если X нерегулярно накрывает Y, то, возможно, не все точки на X, лежащие над одной и той же точкой на Y, имеют одинаковый порядок ветвления. Это обстоятельство дает возможность обобщить классические результаты на случай нерегулярных накрытий.

4.1. Обобщение теоремы Левитса. Следующая теорема обобщает теорему Левитса на случай нерегулярных отображений.

Теорема 3. *Пусть X и Y — римановы поверхности и род X больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение. Предположим, что φ имеет не менее пяти точек полного ветвления. Тогда все они являются точками Вейерштрасса.*

Эта теорема является следствием из леммы ниже.

Лемма 1. *Пусть X и Y — римановы поверхности и род X больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени n. Предположим, что φ имеет точку полного ветвления P. Тогда P будет точкой Вейерштрасса на X, если суммарный порядок ветвления B отображения φ удовлетворяет неравенству* $B \geq 4n-2$.

Доказательство. Пусть X и Y имеют рода g и γ соответственно. Покажем, что на X существует мероморфная функция с единственным полюсом порядка $\leq g$ в точке P.

Пусть $Q = \varphi(P) \in Y$. Тогда на Y существует функция $\tilde{f} \in \mathscr{M}(Y)$, голоморфная в $Y \setminus \{Q\}$ и имеющая полюс порядка $\leq \gamma+1$ в точке Q. Для доказательства этого факта воспользуемся неравенством Римана для дивизора $D = -(\gamma+1)Q$. В результате получим

$$l(D) \geq -\deg D - \gamma + 1 = \gamma + 1 - \gamma + 1 = 2,$$

поскольку $\deg D = -(\gamma+1)$. Таким образом, $l(D) \geq 2$, что влечет существование функции $\tilde{f}$.

Пусть $f = \tilde{f} \circ \varphi$ (f является поднятием $\tilde{f}$ на X). Тогда $f \in \mathscr{M}(X)$, f голоморфна в $X \setminus \{P\}$ и имеет в точке P полюс порядка $\leq n(\gamma+1)$. Из формулы Римана — Гурвица для φ и условия $B \geq 4n-2$ имеем

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B \geq 2n\gamma - 2n + 4n - 2$$

или $g \geq n(\gamma+1)$. Таким образом, f в точке P имеет полюс порядка $\leq g$. Следовательно, P — точка Вейерштрасса на X. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени n. Заметим, что суммарный порядок ветвления B отображения

φ удовлетворяет неравенству $B \geq 5(n-1)$, когда n нечетное, и неравенству $B \geq 5(n-1)+1$, когда n четное, поскольку B — всегда четное число. Стало быть, для $n \geq 2$ выполнено $B \geq 4n-2$. Отсюда согласно лемме 1 следует, что каждая точка полного ветвления отображения φ является точкой Вейерштрасса. $\square$

Замечание. Пусть в условиях теоремы 3 голоморфное отображение φ имеет только k точек полного ветвления, где $1 \leq k \leq 4$. Обозначим через r_φ сумму порядков ветвления отображения φ степени n во всех точках, за исключением данных k. Согласно лемме 1 все эти k точек будут точками Вейерштрасса, если $r_\varphi > (4-k)(n-1)$.

4.2. Случай строго разветвленных голоморфных отображений. Чтобы сформулировать следующую теорему, понадобится определение строго разветвленного голоморфного отображения. Оно введено в [12] Акколой и связано с обобщением понятия гиперэллиптичности.

Определение 5 [12]. Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение римановых поверхностей родов g и γ соответственно. Отображение φ называется *строго разветвленным*, если $g > n^2\gamma + (n-1)^2$.

Теорема 4. *Пусть X и Y — римановы поверхности и род X больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — строго разветвленное отображение и P — точка полного ветвления отображения φ. Тогда P является точкой Вейерштрасса на X.*

Доказательство. Пусть γ — род поверхности Y. Согласно [12, с. 316] условие на φ быть строго разветвленным эквивалентно условию

$$B > 2n(n-1)(\gamma+1)$$

или, поскольку B — всегда четное число, условию

$$B \geq 2n(n-1)(\gamma+1)+2.$$

Сравним последнее неравенство и $B \geq 4n-2$ из леммы 1. Имеем

$$2n(n-1)(\gamma+1)+2-(4n-2) = 2(n(\gamma+1)-2)(n-1) \geq 0$$

для $n \geq 2$. Поэтому P — точка Вейерштрасса на X согласно лемме 1. $\square$

4.3. Случай, когда образ точки полного ветвления — точка Вейерштрасса. Следующая лемма описывает случай, когда точка полного ветвления голоморфного отображения переходит в точку Вейерштрасса.

Лемма 2. *Пусть X и Y — римановы поверхности и род Y больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение степени n. Предположим, что φ имеет точку полного ветвления P и переводит ее в точку Вейерштрасса на Y. Тогда P будет точкой Вейерштрасса на X, если суммарный порядок ветвления B отображения φ удовлетворяет неравенству $B \geq 2n-2$.*

Доказательство. Пусть X и Y имеют рода g и γ соответственно. Покажем, что на X существует мероморфная функция с единственным полюсом порядка $\leq g$ в точке P.

Пусть P — точка полного ветвления отображения φ и $Q = \varphi(P)$ — точка Вейерштрасса на Y. По определению точки Вейерштрасса на Y существует функция $\tilde{f} \in \mathscr{M}(Y)$, голоморфная в $Y \setminus \{Q\}$ и имеющая полюс порядка $\leq \gamma$ в точке Q. Пусть $f = \tilde{f} \circ \varphi$, тогда $f \in \mathscr{M}(X)$, f голоморфна в $X \setminus \{P\}$ и имеет полюс порядка $\leq n\gamma$ в P. Из формулы Римана — Гурвица для φ и условия $B \geq 2n - 2$ получим

$$2g - 2 = n(2\gamma - 2) + B \geq n(2\gamma - 2) + 2n - 2$$

или

$$g \geq n(\gamma - 1) + n - 1 + 1 = n\gamma.$$

Таким образом, f в точке P имеет полюс порядка $\leq g$. Стало быть, P — точка Вейерштрасса на X. $\square$

Непосредственным следствием из леммы 2 является

Теорема 5. *Пусть X и Y — римановы поверхности и род Y больше* 1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — голоморфное отображение. Предположим, что φ имеет не меньше двух точек полного ветвления. Пусть P — одна из этих точек и $\varphi(P)$ — точка Вейерштрасса на Y. Тогда P — точка Вейерштрасса на X.*

Замечание. В отличие о теоремы 3 в теореме 5 требуется меньше точек полного ветвления.

Автор благодарен своему научному руководителю, профессору А. Д. Медных за советы и плодотворное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schöneberg B.* Über die Weierstrass-Punkte in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1951. V. 17. P. 104–111.
2. *Lewittes J.* Automorphisms of compact Riemann surfaces // Amer. J. Math. 1963. V. 85, N 4. P. 734–752.
3. *Larcher H.* Weierstrass points at the cusps of $\Gamma_0(16p)$ and hyperellipticity of $\Gamma_0(n)$ // Can. J. Math. 1971. V. 23. P. 960–968.
4. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1981. (Grad. Texts Math.; V. 71).
5. *Guerrero I.* Automorphisms of compact Riemann surfaces and Weierstrass points // Brook Conf. (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978). Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1981. P. 215–224. (Ann. Math. Stud.; V. 97).
6. *Accola R. D. M.* On generalized Weierstrass points on Riemann surfaces // Modular functions in analysis and number theory. Pittsburgh, PA: Univ. Pittsburgh, 1983. P. 1–19. (Lect. Notes Math. Stat.; V. 5).
7. *Maclachlan C.* On Schoeneberg's theorem // Glasgow Math. J. 1973. V. 14, N 2. P. 202–204.
8. *McQuillan D. L.* A note on Weierstrass points // Can. J. Math. 1967. V. 19. P. 268–272.
9. *Wayman A. K.* An elementary proof of a fixed point theorem of J. Lewittes and D. L. McQuillan // Can. Math. Bull. 1978. V. 21. P. 99–101.
10. *Garcia A., Lax R. F.* Rational nodal curves with no smooth Weierstrass points // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 407–413.
11. *Springer G.* Introduction to Riemann surfaces. Reading, MA: Addison-Wesley, 1957.
12. *Accola R. D. M.* Strongly branched coverings of closed Riemann surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 26, N 2. P. 315–322.

Статья поступила 7 февраля 2014 г.

Лимонов Максим Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Челябинский гос. университет,
лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных 129, Челябинск 454001
volsterm@gmail.com